Integración vectorial y de multifunciones

B. Cascales

Universidad de Murcia

Curso de Doctorado:
Espacios de funciones integrables respecto de una medida vectorial y aplicaciones
Universidad Politécnica de Valencia, Abril 23-27, 2007

Objetivo del curso

Integración vectorial y de multifunciones

- Introducir y familiarizar al alumno con técnicas de integración vectorial y de multifunciones.
- Dar aplicaciones de las técnicas introducidas.
- Establecer conexiones con cuestiones actuales de investigación.

Bibliografía básica

- **Michael F. Barnsley**, *Fractals everywhere*, second ed., Academic Press Professional, Boston, MA, 1993. MR MR1231795 (94h:58101)
- **B. Cascales and S. Troyanski**, *Fundamentos de análisis matemático*, Curso de doctorado Universidad de Murcia, 2004. Disponible en http://misuma.um.es/beca: ir a Docencia→Doctorado→Material Didáctico→Fundamentos de análisis matemático.
- **J. Diestel and J. J. Uhl Jr**, *Vector measures*, Mathematical Surveys, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977. MR 56 #12216
- **G. Köthe**, *Topological vector spaces. I*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 40 #1750
- **E. Klein and A. C. Thompson**, *Theory of correspondences*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and

La notación

- X, Y, . . . denota espacios de Banach;

La notación

- X, Y, ... denota espacios de Banach;
- Dado un espacio de Banach X:
  - B_X es la bola unidad cerrada X;

La notación

- $X, Y, \ldots$ denota espacios de Banach;
- Dado un espacio de Banach X:
  - B_X es la bola unidad cerrada X;
  - X^* es el dual; X^{**} es el bidual;

La notación

- X, Y, ... denota espacios de Banach;
- Dado un espacio de Banach X:
  - B_X es la bola unidad cerrada X;
  - X^* es el dual; X^{**} es el bidual;
  - Si $F \subset X^*$, $\sigma(X, F)$ denota la topología l.c. en X de convergencia puntual en F;

La notación

- X, Y, ... denota espacios de Banach;
- Dado un espacio de Banach X:
  - B_X es la bola unidad cerrada X;
  - X^* es el dual; X^{**} es el bidual;
  - Si $F \subset X^*$, $\sigma(X, F)$ denota la topología l.c. en X de convergencia puntual en F;
  - $\sigma(X, X^*) = w$ es la topología débil de X y $\sigma(X^*, X) = w^*$ es la topología débil* del X^*;

La notación

- X, Y, ... denota espacios de Banach;
- Dado un espacio de Banach X:
  - B_X es la bola unidad cerrada X;
  - X^* es el dual; X^{**} es el bidual;
  - Si $F \subset X^*$, $\sigma(X, F)$ denota la topología l.c. en X de convergencia puntual en F;
  - $\sigma(X, X^*) = w$ es la topología débil de X y $\sigma(X^*, X) = w^*$ es la topología débil* del X^*;
  - $\mathrm{Ext} B_{X^*}$ es el conjunto de puntos extremales de B_{X^*};

La notación

- X, Y, ... denota espacios de Banach;
- Dado un espacio de Banach X:
  - B_X es la bola unidad cerrada X;
  - X^* es el dual; X^{**} es el bidual;
  - Si $F \subset X^*$, $\sigma(X,F)$ denota la topología l.c. en X de convergencia puntual en F;
  - $\sigma(X,X^*) = w$ es la topología débil de X y $\sigma(X^*,X) = w^*$ es la topología débil* del X^*;
  - $\operatorname{Ext} B_{X^*}$ es el conjunto de puntos extremales de B_{X^*};
- K es siempre un espacio compacto y $C(K)$ espacio de funciones continuas dotado de la norma $\| \ \|_\infty$;

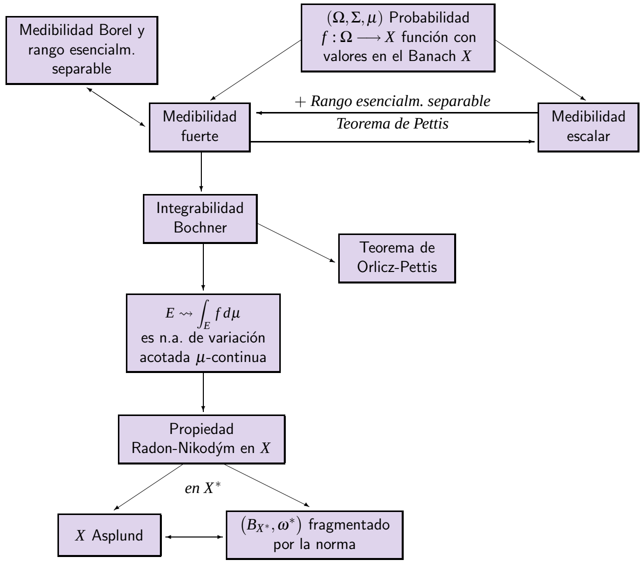
La notación

- X, Y, ... denota espacios de Banach;
- Dado un espacio de Banach X:
  - B_X es la bola unidad cerrada X;
  - X^* es el dual; X^{**} es el bidual;
  - Si $F \subset X^*$, $\sigma(X,F)$ denota la topología l.c. en X de convergencia puntual en F;
  - $\sigma(X,X^*) = w$ es la topología débil de X y $\sigma(X^*,X) = w^*$ es la topología débil* del X^*;
  - $\mathrm{Ext} B_{X^*}$ es el conjunto de puntos extremales de B_{X^*};
- K es siempre un espacio compacto y $C(K)$ espacio de funciones continuas dotado de la norma $\| \ \|_\infty$;
- (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad completo;

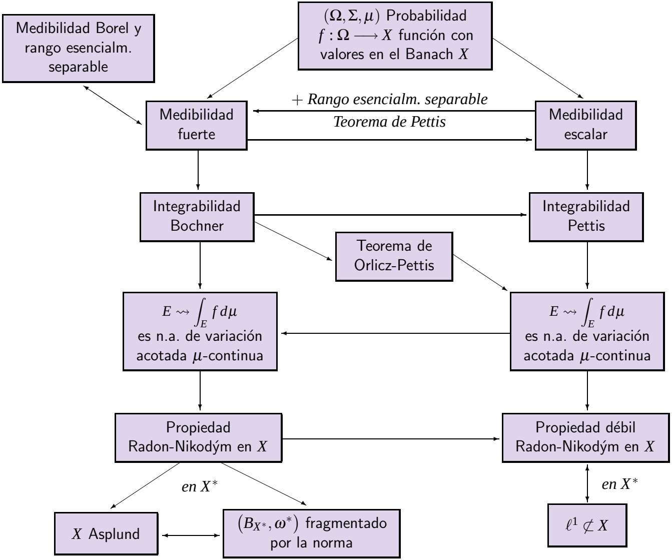
La notación

- X, Y, ... denota espacios de Banach;
- Dado un espacio de Banach X:
  - B_X es la bola unidad cerrada X;
  - X^* es el dual; X^{**} es el bidual;
  - Si $F \subset X^*$, $\sigma(X,F)$ denota la topología l.c. en X de convergencia puntual en F;
  - $\sigma(X,X^*) = w$ es la topología débil de X y $\sigma(X^*,X) = w^*$ es la topología débil* del X^*;
  - $\operatorname{Ext} B_{X^*}$ es el conjunto de puntos extremales de B_{X^*};
- K es siempre un espacio compacto y $C(K)$ espacio de funciones continuas dotado de la norma $\| \ \|_\infty$;
- (Ω, Σ, μ) es un espacio de probabilidad completo;
- $L^1(\mu)$ espacio de las funciones reales μ-integrables.

Integral de Bochner e Integral de Pettis



Integral de Bochner e Integral de Pettis



Pre-requisitos de Análisis Funcional

Teorema de completitud de Grothendieck

Si $x^{**} \in X^{**}$ es tal que $x^{**}|_{B_{X^*}}$ es w^*-continua, entonces se tiene que $x^{**} = x \in X$.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Teorema de completitud de Grothendieck

Si $x^{**} \in X^{**}$ es tal que $x^{**}|_{B_{X^*}}$ es w^*-continua, entonces se tiene que $x^{**} = x \in X$.

Lema

Si $x^{**} \in X^{**}$ es tal que $x^{**}|_{B_{X^*}}$ es w^*-continua, entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in X$ tal que

$$|x^{**}(x^*) - x(x^*)| < \varepsilon \text{ para cada } x^* \in B_{X^*}.$$

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Teorema de Grothendieck-Eberlein-Smulyan

Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado. Para $A \subset X$ son equivalentes:

(i) A es débilmente relativamente compacto en X;

(ii) A es débilmente relativamente sucesionalmente compacto en X;

(iii) A es débilmente relativamente numerablemente compacto en X;

Bajo una (luego cualquiera) de las hipótesis anteriores sobre A si $x \in \overline{A}^{w} \subset X$ entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en A tal que $x = w - \lim_n x_n$.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Teorema de Grothendieck-Eberlein-Smulyan

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Para $A \subset X$ son equivalentes:

(i) A es débilmente relativamente compacto en X;

(ii) A es débilmente relativamente sucesionalmente compacto en X;

(iii) A es débilmente relativamente numerablemente compacto en X;

Bajo una (luego cualquiera) de las hipótesis anteriores sobre A si $x \in \overline{A}^{w} \subset X$ entonces existe una sucesión $(x_n)_n$ en A tal que $x = w - \lim_n x_n$.

Lema (Marciszewski, Raja, Cascales), [CMR06]

Sea (Z, d) un espacio métrico, A un conjunto (x_α) (f_β) redes A and Z^A, respectivamente. Si los límites iterados

$$\lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha) \quad \text{and} \quad \lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha)$$

existen, entonces existen sucesiones crecientes (α_n) (β_m) de índices tal que

$$\lim_n \lim_m f_{\beta_m}(x_{\alpha_n}) = \lim_\alpha \lim_\beta f_\beta(x_\alpha), \ \lim_m \lim_n f_{\beta_m}(x_{\alpha_n}) = \lim_\beta \lim_\alpha f_\beta(x_\alpha)$$

Medibilidad: $f : \Omega \to X$

$\boxed{\text{Función simple}}$ $s : \Omega \longrightarrow X$ se dice *simple* si es de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \text{ donde } \alpha_i \in X,\ A_i \in \Sigma.$$

Medibilidad: $f : \Omega \to X$

$\boxed{\text{Función simple}}$ $s : \Omega \longrightarrow X$ se dice *simple* si es de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \text{ donde } \alpha_i \in X, A_i \in \Sigma.$$

$\boxed{\text{Función } \mu\text{-medible}}$ Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es μ-*medible* si existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples de Ω en X tal que

$$\lim_n \| s_n - f \| = 0, \quad \mu \text{ p.c.t. } w \in \Omega.$$

Medibilidad: $f : \Omega \to X$

Función simple $s : \Omega \longrightarrow X$ se dice *simple* si es de la forma

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \text{ donde } \alpha_i \in X,\ A_i \in \Sigma.$$

Función μ-medible Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es *μ-medible* si existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples de Ω en X tal que

$$\lim_n \| s_n - f \| = 0, \quad \mu \text{ p.c.t. } w \in \Omega.$$

Función débilmente medible Se dice que $f : \Omega \longrightarrow X$ es *débilmente medible* si, para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Propiedades de las funciones medibles

- El conjunto de las funciones μ-medibles es un espacio vectorial.

Propiedades de las funciones medibles

- El conjunto de las funciones μ-medibles es un espacio vectorial.
- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i}$ es simple existe una partición $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ de Ω en Σ de forma que $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$. En particular:

$$\| s \| = \sum_{i=1}^{m} \| \alpha_i \| \chi_{A_i},$$

y por tanto, $\| s \|$ una función escalar simple.

Propiedades de las funciones medibles

- El conjunto de las funciones μ-medibles es un espacio vectorial.
- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \chi_{B_i}$ es simple existe una partición $\{A_i\}_{i=1}^{m}$ de Ω en Σ de forma que $s = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{A_i}$. En particular:

$$\| s \| = \sum_{i=1}^{m} \| \alpha_i \| \chi_{A_i},$$

  y por tanto, $\| s \|$ una función escalar simple.
- Si g es una función vectorial μ-medible, entonces $\| g \|$ es medible.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de Egoroff

Sea $f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones μ-medibles, y sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función tal que $(f_n)_n$ converge hacia f μ-p.c.t.p. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $E \subset \Omega$ con $\mu(E) < \varepsilon$ y tal que $(f_n)_n$ converge hacia f uniformemente en $\Omega \setminus E$.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de Egoroff

Sea $f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones μ-medibles, y sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función tal que $(f_n)_n$ converge hacia f μ-p.c.t.p. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe $E \subset \Omega$ con $\mu(E) < \varepsilon$ y tal que $(f_n)_n$ converge hacia f uniformemente en $\Omega \setminus E$.

Corolario

El conjunto de las funciones μ-medibles con valores en un espacio de Banach es cerrado por límites de sucesiones convergentes en casi todo punto.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable;

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable;
2. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f(\Omega \setminus E)$ un conjunto denso numerable;

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f:\Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E\in\Sigma$ con $\mu(E)=0$ y tal que $f(\Omega\setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^*\in X^*$, la función x^*f es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E\in\Sigma$ tal que $\mu(E)=0$ y $f(\Omega\setminus E)$ es separable;
2. Sea $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset f(\Omega\setminus E)$ un conjunto denso numerable;
3. si elegimos $x_n^*\in X^*$ con $x_n^*(x_n)=\| x_n \|$ y $\| x_n \|^*=1$,, para $w\in\Omega\setminus E$, $\|f(w)\|=\sup\left\{\left|x_n^* f(w)\right| : n\in\mathbb{N}\right\}$;

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f:\Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable;
2. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f(\Omega \setminus E)$ un conjunto denso numerable;
3. si elegimos $x_n^* \in X^*$ con $x_n^*(x_n) = \| x_n \|$ y $\| x_n \|^* = 1$,, para $w \in \Omega \setminus E$, $\|f(w)\| = \sup\left\{ |x_n^* f(w)| : n \in \mathbb{N} \right\}$;
4. $\| f \|$ y $h_n(w) = \|f(w) - x_n\|$ son medibles;

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f:\Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E)=0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E)=0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable;
2. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f(\Omega \setminus E)$ un conjunto denso numerable;
3. si elegimos $x_n^* \in X^*$ con $x_n^*(x_n) = \| x_n \|$ y $\| x_n \|^* = 1$,, para $w \in \Omega \setminus E$, $\|f(w)\| = \sup\Big\{|x_n^* f(w)| : n \in \mathbb{N}\Big\}$;
4. $\| f \|$ y $h_n(w) = \|f(w) - x_n\|$ son medibles;
5. Dado $\varepsilon > 0$, $B_n = \Big\{w \in \Omega : \|f(w) - x_n\| < \varepsilon\Big\} \in \Sigma$.;

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f:\Omega\longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E\in\Sigma$ con $\mu(E)=0$ y tal que $f(\Omega\setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^*\in X^*$, la función x^*f es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E\in\Sigma$ tal que $\mu(E)=0$ y $f(\Omega\setminus E)$ es separable;
2. Sea $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}\subset f(\Omega\setminus E)$ un conjunto denso numerable;
3. si elegimos $x_n^*\in X^*$ con $x_n^*(x_n)=\| x_n \|$ y $\| x_n \|^*=1$,, para $w\in\Omega\setminus E$, $\|f(w)\|=\sup\Big\{|x_n^*f(w)|:n\in\mathbb{N}\Big\}$;
4. $\| f \|$ y $h_n(w)=\|f(w)-x_n\|$ son medibles;
5. Dado $\varepsilon>0$, $B_n=\Big\{w\in\Omega:\|f(w)-x_n\|<\varepsilon\Big\}\in\Sigma.$;
6. Definimos $g_\varepsilon(w)=\begin{cases} x_n & \text{si } w\in B_n\setminus\bigcup_{m<n}B_m,\\ 0 & \text{en el resto,}\end{cases}$

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f:\Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E)=0$ y tal que $f(\Omega\setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E)=0$ y $f(\Omega\setminus E)$ es separable;
2. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f(\Omega\setminus E)$ un conjunto denso numerable;
3. si elegimos $x_n^* \in X^*$ con $x_n^*(x_n) = \| x_n \|$ y $\| x_n \|^* = 1$,, para $w \in \Omega\setminus E$, $\|f(w)\| = \sup\Big\{|x_n^* f(w)| : n \in \mathbb{N}\Big\}$;
4. $\| f \|$ y $h_n(w) = \|f(w) - x_n\|$ son medibles;
5. Dado $\varepsilon > 0$, $B_n = \Big\{w \in \Omega : \|f(w)-x_n\| < \varepsilon\Big\} \in \Sigma$.;
6. Definimos $g_\varepsilon(w) = \begin{cases} x_n & \text{si } w \in B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m, \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$
7. $\|f(w) - g_\varepsilon(w)\| < \varepsilon$, para cada $w \in \Omega\setminus E$.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable;

6. Definimos $g_\varepsilon(w) = \begin{cases} x_n & \text{si } w \in B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m, \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$

7. $\|f(w) - g_\varepsilon(w)\| < \varepsilon, \quad$ para cada $w \in \Omega \setminus E$.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f:\Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E)=0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E)=0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable;
6. Definimos $g_\varepsilon(w) = \begin{cases} x_n & \text{si } w \in B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m, \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$
7. $\left\| f(w) - g_\varepsilon(w) \right\| < \varepsilon, \quad$ para cada $\; w \in \Omega \setminus E$.
8. Si $A_n := B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m$, entonces $g_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{A_n}$ es medible.

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f:\Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable;
6. Definimos $g_\varepsilon(w) = \begin{cases} x_n & \text{si } w \in B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m, \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$
7. $\|f(w) - g_\varepsilon(w)\| < \varepsilon, \quad$ para cada $w \in \Omega \setminus E$.
8. Si $A_n := B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m$, entonces $g_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{A_n}$ es medible.
9. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$ construimos g_m medible con existe g_m de la forma anterior tal que

$$\|f(w) - g_m(w)\| < \frac{1}{m}, \quad \text{p.c.t.p. en } \Omega.$$

Propiedades de las funciones medibles

Teorema de medibilidad de Pettis

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. (a) Existe $E \in \Sigma$ con $\mu(E) = 0$ y tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.
   (b) Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^* f$ es medible.

Demostración: La implicación (1)$\Rightarrow$ (2) es fácil. Recíprocamente.

1. Sea $E \in \Sigma$ tal que $\mu(E) = 0$ y $f(\Omega \setminus E)$ es separable;

6. Definimos $g_\varepsilon(w) = \begin{cases} x_n & \text{si } w \in B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m, \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$

7. $\|f(w) - g_\varepsilon(w)\| < \varepsilon, \quad$ para cada $w \in \Omega \setminus E$.

8. Si $A_n := B_n \setminus \bigcup_{m<n} B_m$, entonces $g_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \chi_{A_n}$ es medible.

9. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$ construimos g_m medible con existe g_m de la forma anterior tal que

$$\|f(w) - g_m(w)\| < \frac{1}{m}, \quad \text{p.c.t.p. en } \Omega.$$

10. f es medible.

Mirando a la prueba del teorema de Pettis. . .

Corolario

Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es medible si, y sólo si, es límite uniforme en casi todo punto de una sucesión de funciones medibles que toman una cantidad numerable de valores.

Mirando a la prueba del teorema de Pettis...

Corolario

Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es medible si, y sólo si, es límite uniforme en casi todo punto de una sucesión de funciones medibles que toman una cantidad numerable de valores.

Corolario

Sean $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-esencialmente separable valuada y $B \subset B_{X^*}$ un conjunto normante para X, tales que $x^* f$ es medible para cada $x^* \in B$. Entonces, f es μ-medible.

Mirando a la prueba del teorema de Pettis...

Corolario

Una función $f : \Omega \longrightarrow X$ es medible si, y sólo si, es límite uniforme en casi todo punto de una sucesión de funciones medibles que toman una cantidad numerable de valores.

Corolario

Sean $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-esencialmente separable valuada y $B \subset B_{X^*}$ un conjunto normante para X, tales que $x^* f$ es medible para cada $x^* \in B$. Entonces, f es μ-medible.

Medible$\neq$débilmente medible

Consideremos el espacio de Hilbert $\ell^2\big([0,1]\big)$, y sea

$$f : [0,1] \rightarrow \ell^2\big([0,1]\big)$$

$$t \rightarrow e_t$$

donde $\big\{e_t : t \in [0,1]\big\}$ es la base ortonormal canónica del espacio de Hilbert $\ell^2\big([0,1]\big)$. f es débilmente medible y no medible.

Consecuencias del teorema de Pettis

Corolario

Sean f y g funciones μ-medibles. Si para cada $x^* \in X^*$ se tiene que

$$x^* f = x^* g = 0, \quad \text{p.c.t.p. en } \Omega \text{ (el conjunto de medida nula depende de } x^*),$$

entonces $f = g$ p.c.t.p. en Ω.

Consecuencias del teorema de Pettis

Corolario

Sean f y g funciones μ-medibles. Si para cada $x^* \in X^*$ se tiene que

$$x^* f = x^* g = 0, \quad \text{p.c.t.p. en } \Omega \text{ (el conjunto de medida nula depende de } x^*),$$

entonces $f = g$ p.c.t.p. en Ω.

Medibilidad Borel $f : \Omega \longrightarrow X$ es *medible Borel* cuando $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para cada subconjunto de Borel B en X.

Consecuencias del teorema de Pettis

Corolario

Sean f y g funciones μ-medibles. Si para cada $x^* \in X^*$ se tiene que

$$x^*f = x^*g = 0, \quad \text{p.c.t.p. en } \Omega \text{ (el conjunto de medida nula depende de } x^*),$$

entonces $f = g$ p.c.t.p. en Ω.

Medibilidad Borel $f : \Omega \longrightarrow X$ es *medible Borel* cuando $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para cada subconjunto de Borel B en X.

Corolario

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes:

1. f es μ-medible.
2. f es medible Borel y existe $E \in \Sigma$, con $\mu(E) = 0$, tal que $f(\Omega \setminus E)$ es separable.

Integral de Bochner

Integración de funciones simples

- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, con $A_i \in \Sigma$ y $\alpha_i \in X$, es una función simple, definimos la integral
$$\int_E s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$
para cada $E \in \Sigma$.

Integral de Bochner

Integración de funciones simples

- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, con $A_i \in \Sigma$ y $\alpha_i \in X$, es una función simple, definimos la integral
$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$
para cada $E \in \Sigma$.
- Se comprueba que la definición anterior es independiente de la representación elegida para la función simple s.

Integral de Bochner

Integración de funciones simples

- Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, con $A_i \in \Sigma$ y $\alpha_i \in X$, es una función simple, definimos la integral
$$\int_E s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E \cap A_i),$$
para cada $E \in \Sigma$.
- Se comprueba que la definición anterior es independiente de la representación elegida para la función simple s.
- La integral es lineal, definida en el espacio de las funciones simples.

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f:\Omega \longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu\right)_n$ es de Cauchy en X;

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu \right)_n$ es de Cauchy en X;
- Definimos $\int_E f \, d\mu := \lim_n \int_E s_n \, d\mu$;

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f:\Omega\longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E\in\Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu\right)_n$ es de Cauchy en X;
- Definimos $\int_E f \, d\mu := \lim_n \int_E s_n \, d\mu$;
- Al vector $\displaystyle\int_E f \, d\mu$ se le llama *integral de Bochner de f sobre E*;

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu\right)_n$ es de Cauchy en X;
- Definimos $\int_E f \, d\mu := \lim_n \int_E s_n \, d\mu$;
- Al vector $\displaystyle\int_E f \, d\mu$ se le llama *integral de Bochner de f sobre E*;
- $\displaystyle\int_E f \, d\mu$ es independiente de la sucesión de simples;

Integral de Bochner

Integral de Bochner Una función μ-medible $f : \Omega \longrightarrow X$ se dice que es *integrable Bochner*, si existe una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tal que

$$\lim_n \int_\Omega \| s_n - f \| \, d\mu = 0.$$

- Para cada $E \in \Sigma$, la sucesión $\left(\int_E s_n \, d\mu \right)_n$ es de Cauchy en X;
- Definimos $\int_E f \, d\mu := \lim_n \int_E s_n \, d\mu$;
- Al vector $\int_E f \, d\mu$ se le llama *integral de Bochner de f sobre E*;
- $\int_E f \, d\mu$ es independiente de la sucesión de simples;
- El conjunto de las funciones $f : \Omega \longrightarrow X$ integrables Bochner es un espacio vectorial.

Teorema de convergencia Dominada

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Son equivalentes:

1. f es integrable Bochner.
2. $\| f \|$ es integrable Lebesgue.

Teorema de convergencia Dominada

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función μ-medible. Son equivalentes:

1. f es integrable Bochner.
2. $\| f \|$ es integrable Lebesgue.

Proposición

Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es integrable Bochner, entonces, para todo $E \in \Sigma$, se tiene que

$$\left\| \int_E f \, d\mu \right\| \leq \int_E \| f \| \, d\mu .$$

Propiedades de Integral de Bochner

Convergencia en medida Sean $f, f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, funciones μ-medibles. Decimos que $(f_n)_n$ *converge hacia* f *en medida* si, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(\big\{w \in \Omega : \big\|f_n(w) - f(w)\big\| > \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

Propiedades de Integral de Bochner

Convergencia en medida Sean $f, f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, funciones μ-medibles. Decimos que $(f_n)_n$ *converge hacia f en medida* si, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mu\Big(\big\{w \in \Omega : \big\|f_n(w) - f(w)\big\| > \varepsilon\big\}\Big) = 0.$$

Teorema de Convergencia Dominada

Sea $f_n : \Omega \longrightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones integrables Bochner, que converge hacia una función μ-medible f en casi todo punto o en medida. Supongamos además que existe una función $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, integrable Lebesgue, tal que $\| f_n \| \leq g$ p.c.t.p. en Ω. Entonces, f es integrable Bochner y

$$\lim_n \int_E f_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu, \quad \text{para todo } E \in \Sigma.$$

De hecho, se tiene que

$$\lim_n \int_\Omega \| f_n - f \| \, d\mu = 0.$$

Propiedades de Integral de Bochner

Medidas vectoriales

- Una *medida vectorial finitamente aditiva* es una aplicación $F : \Sigma \longrightarrow X$ que satisface
$$F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2),$$
para cualesquiera miembros disjuntos E_1 y E_2 de Σ.

Propiedades de Integral de Bochner

Medidas vectoriales

- Una *medida vectorial finitamente aditiva* es una aplicación $F : \Sigma \longrightarrow X$ que satisface
$$F(E_1 \cup E_2) = F(E_1) + F(E_2),$$
para cualesquiera miembros disjuntos E_1 y E_2 de Σ.
- F se dice que es *numerablemente aditiva* (respectivamente, *débilmente numerablemente aditiva*) si
$$F\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n),$$
para cualquier sucesión $(E_n)_n$ de elementos de Σ disjuntos dos a dos, donde la serie es convergente en la topología de la norma (respectivamente, en la topología débil) de X.

Propiedades de Integral de Bochner

Variación de una medida vectorial

- Si $F : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida f.a. su *variación* $|F|$ es la función de conjunto dada, para cada $E \in \Sigma$, por la expresión

$$|F|(E) := \sup\left\{ \sum_{A\in\pi} \left\|F(A)\right\| : \pi \in \Pi \right\}, \tag{1}$$

Π es la familia de todas las particiones $\pi = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de E, con $A_i \in \Sigma$.

Propiedades de Integral de Bochner

Variación de una medida vectorial

- Si $F : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida f.a. su *variación* $|F|$ es la función de conjunto dada, para cada $E \in \Sigma$, por la expresión

$$|F|(E) := \sup\left\{ \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| : \pi \in \Pi \right\}, \tag{1}$$

  Π es la familia de todas las particiones $\pi = \{A_1, \dots, A_n\}$ de E, con $A_i \in \Sigma$.
- Si F es n. a. las particiones en (1) pueden tomarse numerables.

Propiedades de Integral de Bochner

Variación de una medida vectorial

- Si $F:\Sigma \longrightarrow X$ es una medida f.a. su *variación* $|F|$ es la función de conjunto dada, para cada $E \in \Sigma$, por la expresión

$$|F|(E) := \sup\left\{ \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| : \pi \in \Pi \right\}, \tag{1}$$

  Π es la familia de todas las particiones $\pi = \{A_1,\dots,A_n\}$ de E, con $A_i \in \Sigma$.
- Si F es n. a. las particiones en (1) pueden tomarse numerables.
- F se dice de *variación acotada* si $|F|(\Omega) < \infty$.

Propiedades de Integral de Bochner

Variación de una medida vectorial

- Si $F:\Sigma \longrightarrow X$ es una medida f.a. su *variación* $|F|$ es la función de conjunto dada, para cada $E \in \Sigma$, por la expresión

$$|F|(E) := \sup\left\{ \sum_{A\in\pi} \left\|F(A)\right\| : \pi \in \Pi \right\}, \tag{1}$$

  Π es la familia de todas las particiones $\pi = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de E, con $A_i \in \Sigma$.
- Si F es n. a. las particiones en (1) pueden tomarse numerables.
- F se dice de *variación acotada* si $|F|(\Omega) < \infty$.
- Una medida de variación acotada F es numerablemente aditiva si, y sólo si, su variación $|F|$ es numerablemente aditiva, [DJ77, Section I.1].

Propiedades de Integral de Bochner

Variación de una medida vectorial

- Si $F : \Sigma \longrightarrow X$ es una medida f.a. su *variación* $|F|$ es la función de conjunto dada, para cada $E \in \Sigma$, por la expresión

$$|F|(E) := \sup\left\{ \sum_{A\in\pi} \|F(A)\| : \pi \in \Pi \right\}, \tag{1}$$

  Π es la familia de todas las particiones $\pi = \{A_1, \dots, A_n\}$ de E, con $A_i \in \Sigma$.
- Si F es n. a. las particiones en (1) pueden tomarse numerables.
- F se dice de *variación acotada* si $|F|(\Omega) < \infty$.
- Una medida de variación acotada F es numerablemente aditiva si, y sólo si, su variación $|F|$ es numerablemente aditiva, [DJ77, Section I.1].
- $F : \Sigma \longrightarrow X$ se dice que es *absolutamente continua* respecto de μ si $\mu(A) = 0$ implica $F(A) = 0$.

Propiedades de Integral de Bochner

Variación de una medida vectorial

- Si $F:\Sigma \longrightarrow X$ es una medida f.a. su *variación* $|F|$ es la función de conjunto dada, para cada $E \in \Sigma$, por la expresión

$$|F|(E) := \sup\left\{\sum_{A\in\pi} \|F(A)\| : \pi \in \Pi\right\}, \tag{1}$$

  Π es la familia de todas las particiones $\pi = \{A_1, \dots, A_n\}$ de E, con $A_i \in \Sigma$.
- Si F es n. a. las particiones en (1) pueden tomarse numerables.
- F se dice de *variación acotada* si $|F|(\Omega) < \infty$.
- Una medida de variación acotada F es numerablemente aditiva si, y sólo si, su variación $|F|$ es numerablemente aditiva, [DJ77, Section I.1].
- $F:\Sigma \longrightarrow X$ se dice que es *absolutamente continua* respecto de μ si $\mu(A) = 0$ implica $F(A) = 0$.
- Si F es n. a. entonces F es absolutamente continua respecto de μ si, y sólo si, $\lim_{\mu(A)\to 0} F(A) = 0$: teorema de Pettis, [DJ77, Section I.2].

La integral indefinida

Teorema

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner, y sea $F(E) = \int_E f \, d\mu$, $E \in \Sigma$. Entonces:

1. $\lim_{\mu(E)\to 0} F(E) = 0$.
2. F es una medida vectorial numerablemente aditiva de variación acotada y, para cada $E \in \Sigma$, se tiene que

$$|F|(E) = \int_E \| f \| \, d\mu.$$

Fórmula baricéntrica

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces:

1. Si Y es otro espacio de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ es lineal y continua, entonces Tf también es integrable Bochner y

$$T\left(\int_E f\,d\mu\right) = \int_E Tf\,d\mu, \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

2. Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^*f \in L^1(\mu)$, y se tiene que

$$x^*\left(\int_E f\,d\mu\right) = \int_E x^*f\,d\mu, \quad \text{para cada } E \in \Sigma.$$

Fórmula baricéntrica

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces:

1. Si Y es otro espacio de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ es lineal y continua, entonces Tf también es integrable Bochner y
$$T\left(\int_E f\,d\mu\right) = \int_E Tf\,d\mu, \quad \text{para cada } \; E \in \Sigma.$$
2. Para cada $x^* \in X^*$, la función $x^*f \in L^1(\mu)$, y se tiene que
$$x^*\left(\int_E f\,d\mu\right) = \int_E x^*f\,d\mu, \quad \text{para cada } \; E \in \Sigma.$$

Corolario

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Teorema de Krein-Smulyan

Proposición

Sea X un espacio de Banach y sea H un subconjunto débilmente compacto de X. Entonces, la envoltura convexa y cerrada de H, $\overline{\mathrm{co}(H)}$, es débilmente compacta.

Teorema de Krein-Smulyan

Proposición

Sea X un espacio de Banach y sea H un subconjunto débilmente compacto de X. Entonces, la envoltura convexa y cerrada de H, $\overline{\mathrm{co}}(H)$, es débilmente compacta.

Proposición...otra mirada a medibilidad

Para $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes:

(α) f es medible;

(β) Para cada $\varepsilon > 0$ f existe una partición $B_0, B_1, \ldots, B_m$ de Ω en Σ tal que:

- i) $\| \ \| - \mathrm{diam}(f(B_i)) < \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, m$;
- ii) $\mu(B_0) < \varepsilon$.

(γ) Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \Sigma$, $B \subset A$ y $\mu(B) > 0$ tal que $\| \ \| \mathrm{diam}\, f(B) < \varepsilon$.

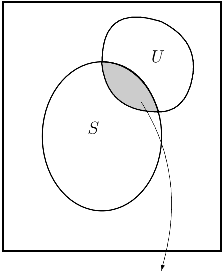
Fragmentabilidad vs. medibilidad

Fragmentabilidad

(T, τ) espacio topológico y d una métrica en T.

Fragmentabilidad vs. medibilidad

(T, τ)



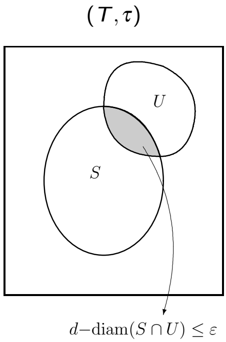
$d-\mathrm{diam}(S \cap U) \leq \varepsilon$

Fragmentabilidad

(T, τ) espacio topológico y d una métrica en T.

- ε-fragmentado.

Fragmentabilidad vs. medibilidad



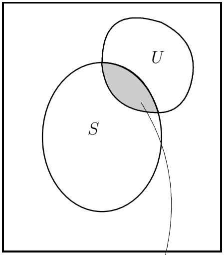
Fragmentabilidad

(T, τ) espacio topológico y d una métrica en T.

- ε-fragmentado.
- fragmentado$\equiv$ ε-fragmentado, para todo ε.

Fragmentabilidad vs. medibilidad

(T,τ)



$d\text{−diam}(S \cap U) \leq \varepsilon$

Fragmentabilidad

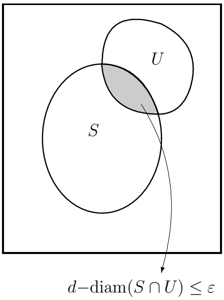
(T,τ) espacio topológico y d una métrica en T.

- ε-fragmentado.
- fragmentado$\equiv$ ε-fragmentado, para todo ε.

Tomaremos $T = X$ donde $(X, \| \ \|)$ es un espacio de Banach: τ una topología l.c. más gruesa que la asociada a $\| \ \|$ y d la métrica asociada a la norma

Fragmentabilidad vs. medibilidad

(T, τ)



Fragmentabilidad

(T, τ) espacio topológico y d una métrica en T.

- ε-fragmentado.
- fragmentado$\equiv$ ε-fragmentado, para todo ε.

Tomaremos $T = X$ donde $(X, \| \, \|)$ es un espacio de Banach: τ una topología l.c. más gruesa que la asociada a $\| \, \|$ y d la métrica asociada a la norma

Teorema, Shvydkoy-Cascales, [CS03]

Sea $(X, \| \, \|)$ un espacio de Banach y τ cualquier topología vectorial en X más gruesa que la topología de la norma. Si $H \subset X$ es τ-compacto y acotado en norma y $\| \, \|$-fragmentado, entonces $\overline{\text{co}}^{\tau} H$ is τ-compacto. Además,

$$\overline{\text{co}}^{\tau} H = \overline{\text{co}}^{\| \, \|} H.$$

Aplicaciones

Corolario, Krein-Smulyan

Sea X un espacio de Banach y sea H un subconjunto débilmente compacto de X. Entonces, la envoltura convexa y cerrada de H, $\overline{\mathrm{co}(H)}$, es débilmente compacta.

Aplicaciones

Corolario, Krein-Smulyan

Sea X un espacio de Banach y sea H un subconjunto débilmente compacto de X. Entonces, la envoltura convexa y cerrada de H, $\overline{\mathrm{co}(H)}$, es débilmente compacta.

Corolario, Namioka 1987

Sea X un espacio de Banach y sea $H \subset X^*$ un subconjunto w^*-compacto y fragmentado por la norma dual.

$$\overline{\mathrm{co}}^{w^*} H = \overline{\mathrm{co}}^{\|\ \|} H.$$

La propiedad de Radon-Nikodým

La propiedad de Radon-Nikodým X se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* (brevemente, PRN) respecto de μ si, para cada medida vectorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ de variación acotada que es absolutamente continua respecto de μ, existe una función integrable Bochner $f : \Omega \longrightarrow X$ tal que $F(E) = \int_E f \, d\mu$, para todo $E \in \Sigma$.

- El clásico teorema de Radon-Nikodým para medidas escalares, establece que $X = \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.
- Los espacios de Banach reflexivos, y entre los segundos está c_0.

La propiedad de Radon-Nikodým

La propiedad de Radon-Nikodým X se dice que tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* (brevemente, PRN) respecto de μ si, para cada medida vectorial $F : \Sigma \longrightarrow X$ de variación acotada que es absolutamente continua respecto de μ, existe una función integrable Bochner $f : \Omega \longrightarrow X$ tal que $F(E) = \int_E f \, d\mu$, para todo $E \in \Sigma$.

- El clásico teorema de Radon-Nikodým para medidas escalares, establece que $X = \mathbb{R}$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.
- Los espacios de Banach reflexivos, y entre los segundos está c_0.

Teorema Namioka-Phelps-Stegall

Para un espacio de Banach X son equivalentes:

1. X es Asplund, *i.e.*, cada función convexa definida en un abierto convexo de X is Fréchet derivable en los puntos de un $\mathscr{G}_\delta$ denso de su dominio;
2. cada subespacio separable de X tiene dual separable;
3. (B_{X^*}, w^*) está fragmentada por la norma;
4. X^* tiene la PRN.

Aplicaciones

Espacios de funciones p-integrables Bochner

- Para $1 \leq p < \infty$, $\mathscr{L}^p(\mu)$ es el espacio de las funciones escalares p-integrables, y si $p = \infty$, $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ es el espacio de las funciones μ-esencialmente acotadas.

Aplicaciones

Espacios de funciones p-integrables Bochner

- Para $1 \leq p < \infty$, $\mathscr{L}^p(\mu)$ es el espacio de las funciones escalares p-integrables, y si $p = \infty$, $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ es el espacio de las funciones μ-esencialmente acotadas.
- $\mathscr{L}^p(\mu, X)$ es el conjunto de las funciones μ-medibles de Ω en X tales que $\| f \| \in \mathscr{L}^p(\mu)$; para $f \in \mathscr{L}^p(\mu, X)$ definimos

$$\| f \|_p := \left(\int_\Omega \| f \|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad \left(= \big\| \| f \| \big\|_p \text{ en } \mathscr{L}^p(\mu) \right),$$

cuando $1 \leq p < \infty$, y si $p = \infty$,

$$\| f \|_\infty := \big\| \| f \| \big\|_\infty \quad (\text{en } \mathscr{L}^\infty(\mu)).$$

Aplicaciones

Espacios de funciones p-integrables Bochner

- Para $1 \leq p < \infty$, $\mathscr{L}^p(\mu)$ es el espacio de las funciones escalares p-integrables, y si $p = \infty$, $\mathscr{L}^\infty(\mu)$ es el espacio de las funciones μ-esencialmente acotadas.
- $\mathscr{L}^p(\mu, X)$ es el conjunto de las funciones μ-medibles de Ω en X tales que $\| f \| \in \mathscr{L}^p(\mu)$; para $f \in \mathscr{L}^p(\mu, X)$ definimos

$$\| f \|_p := \left(\int_\Omega \| f \|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad \left(= \big\| \| f \| \big\|_p \text{ en } \mathscr{L}^p(\mu) \right),$$

  cuando $1 \leq p < \infty$, y si $p = \infty$,

$$\| f \|_\infty := \big\| \| f \| \big\|_\infty \quad (\text{en } \mathscr{L}^\infty(\mu)).$$

- Cada $\| \ \|_p$ es una seminorma, y se tiene que, para $f \in \mathscr{L}^p(\mu, X)$, se da la igualdad $\| f \|_p = 0$ si, y sólo si, $f = 0$ p.c.t.p. en Ω. Si definimos la relación de equivalencia $f \sim g$ si, y sólo si, $f = g$ p.c.t.p. en Ω, el espacio cociente $L^p(\mu, X) := \mathscr{L}^p(\mu, X)/\sim$ es un espacio de Banach cuando se dota de la norma cociente asociada a $\| \ \|_p$.

Aplicaciones

- Se satisface la inclusión $\mathscr{L}^q(\mu, X) \subset \mathscr{L}^p(\mu, X), \quad$ para $q \geq p$.

Aplicaciones

- Se satisface la inclusión $\mathscr{L}^q(\mu,X) \subset \mathscr{L}^p(\mu,X)$, para $q \geq p$.
- Las funciones simples medibles son densas en $\big(L^p(\mu,X), \| \ \|_p\big)$, si $1 \leq p < \infty$, y el conjunto de las funciones de $L^\infty(\mu,X)$ que toman una cantidad numerable de valores, es denso en este último espacio dotado de la norma $\| \ \|_\infty$.

Aplicaciones

- Se satisface la inclusión $\mathscr{L}^q(\mu,X)\subset\mathscr{L}^p(\mu,X)$, para $q\geq p$.
- Las funciones simples medibles son densas en $\big(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\big)$, si $1\leq p<\infty$, y el conjunto de las funciones de $L^\infty(\mu,X)$ que toman una cantidad numerable de valores, es denso en este último espacio dotado de la norma $\|\ \|_\infty$.
- $\big(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\big)^*\supset L^q(\mu,X^*)$ isométricamente (normante).

Aplicaciones

- Se satisface la inclusión $\mathscr{L}^q(\mu,X) \subset \mathscr{L}^p(\mu,X), \quad$ para $q \geq p$.
- Las funciones simples medibles son densas en $\left(L^p(\mu,X), \| \ \|_p\right)$, si $1 \leq p < \infty$, y el conjunto de las funciones de $L^\infty(\mu,X)$ que toman una cantidad numerable de valores, es denso en este último espacio dotado de la norma $\| \ \|_\infty$.
- $\left(L^p(\mu,X), \| \ \|_p\right)^* \supset L^q(\mu,X^*)$ isométricamente (normante).
- Para $1 \leq p < \infty$, la igualdad $\left(L^p(\mu,X), \| \ \|_p\right)^* = L^q(\mu,X^*)$ equivale a X^* tiene la PRN respecto de μ, véase [DJ77, Theorem 1, p. 98].

Aplicaciones

- Se satisface la inclusión $\mathscr{L}^q(\mu,X) \subset \mathscr{L}^p(\mu,X)$, para $q \geq p$.
- Las funciones simples medibles son densas en $\left(L^p(\mu,X), \|\ \|_p\right)$, si $1 \leq p < \infty$, y el conjunto de las funciones de $L^\infty(\mu,X)$ que toman una cantidad numerable de valores, es denso en este último espacio dotado de la norma $\|\ \|_\infty$.
- $\left(L^p(\mu,X), \|\ \|_p\right)^* \supset L^q(\mu,X^*)$ isométricamente (normante).
- Para $1 \leq p < \infty$, la igualdad $\left(L^p(\mu,X), \|\ \|_p\right)^* = L^q(\mu,X^*)$ equivale a X^* tiene la PRN respecto de μ, véase [DJ77, Theorem 1, p. 98].

Corolario

Para $1 \leq p < \infty$ denotamos por $\sigma' = \sigma(L^p(\mu,X), L^q(\mu,X^*))$. Para cada subconjunto σ'-compacto H de $L^p(\mu,X)$ tenemos:

v) H está fragmentado por la norma de $L^p(\mu,X)$;

iii) $\overline{co(H)}^{\sigma'}$ es σ'-compact (Batt-Hiermeyer 1983);

iv) $\overline{co(H)}^{\sigma'} = \overline{co(H)}^{\|\ \|_p}$ (Batt-Hiermeyer 1983).

Recordatorio sesión anterior

Algunas citas ...

- Polaridad: [CT04, Sec. 1.3.5].

Recordatorio sesión anterior

Algunas citas ...

- Polaridad: [CT04, Sec. 1.3.5].
- Teorema del bipolar: [CT04, Teorema 1.3.37].

Recordatorio sesión anterior

Algunas citas ...

- Polaridad: [CT04, Sec. 1.3.5].
- Teorema del bipolar: [CT04, Teorema 1.3.37].
- Si A, B absolutamente convexos $\sigma(X, X^*)$-cerrados entonces

$$(A \cap B)^0 = \overline{\mathrm{aco}(A^0 \cup B^0)} \subset \overline{A^0 + B^0},$$

ver [CT04, Corolario 1.3.40].

Recordatorio sesión anterior

Algunas citas ...

- Polaridad: [CT04, Sec. 1.3.5].
- Teorema del bipolar: [CT04, Teorema 1.3.37].
- Si A, B absolutamente convexos $\sigma(X, X^*)$-cerrados entonces

$$(A \cap B)^0 = \overline{\mathrm{aco}(A^0 \cup B^0)} \subset \overline{A^0 + B^0},$$

  ver [CT04, Corolario 1.3.40].
- Lema iteración límites con redes es lo mismo que con sucesiones: [CMR06].

Recordatorio sesión anterior

Algunas citas ...

- Polaridad: [CT04, Sec. 1.3.5].
- Teorema del bipolar: [CT04, Teorema 1.3.37].
- Si A, B absolutamente convexos $\sigma(X, X^*)$-cerrados entonces

$$(A \cap B)^0 = \overline{\mathrm{aco}(A^0 \cup B^0)} \subset \overline{A^0 + B^0},$$

  ver [CT04, Corolario 1.3.40].
- Lema iteración límites con redes es lo mismo que con sucesiones: [CMR06].
- Resultado para topologías fragmentadas con Shvydkoy: [CS03].

Recordatorio sesión anterior

Algunas citas . . .

- Polaridad: [CT04, Sec. 1.3.5].
- Teorema del bipolar: [CT04, Teorema 1.3.37].
- Si A, B absolutamente convexos $\sigma(X, X^*)$-cerrados entonces

$$(A \cap B)^0 = \overline{\mathrm{aco}(A^0 \cup B^0)} \subset \overline{A^0 + B^0},$$

  ver [CT04, Corolario 1.3.40].
- Lema iteración límites con redes es lo mismo que con sucesiones: [CMR06].
- Resultado para topologías fragmentadas con Shvydkoy: [CS03].
- Cuestiones sobre baricentros y el teorema de Krein-Smulyan en [CT04, Sección 3.3.5].

Recordatorio sesión anterior

Teorema, Shvydkoy-Cascales, [CS03]

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y τ cualquier topología vectorial en X más gruesa que la topología de la norma. Si $H \subset X$ es τ-compacto y acotado en norma y $\| \ \|$-fragmentado, entonces $\overline{\text{co}}^{\tau} H$ is τ-compacto. Además,

$$\overline{\text{co}}^{\tau} H = \overline{\text{co}}^{\| \ \|} H.$$

Recordatorio sesión anterior

Teorema, Shvydkoy-Cascales, [CS03]

Sea $(X, \| \|)$ un espacio de Banach y τ cualquier topología vectorial en X más gruesa que la topología de la norma. Si $H \subset X$ es τ-compacto y acotado en norma y $\| \|$-fragmentado, entonces $\overline{\text{co}}^{\tau} H$ is τ-compacto. Además,

$$\overline{\text{co}}^{\tau} H = \overline{\text{co}}^{\| \|} H.$$

Al revisar la prueba...

Es suficiente con tener *integrabilidad* para $f : \Omega \to X$ que permita escribir

$$x^*\left(\int_E f \, d\mu\right) = \int_E x^* f \, d\mu, \quad \text{para cada } \; E \in \Sigma.$$

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Teorema James, [Flo80]

Un conjunto débil cerrado C de un espacio de Banach X es débilmente compacto si, y sólo si, todos los $x^* \in X^*$ alcanzan su máximo en C.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Teorema James, [Flo80]

Un conjunto débil cerrado C de un espacio de Banach X es débilmente compacto si, y sólo si, todos los $x^* \in X^*$ alcanzan su máximo en C.

Corolario

Para un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Todos los subconjuntos w-cerrados de X son proximinales.
2. Todas las variedades afines cerradas de X son proximinales.
3. Todos los hiperplanos afines cerrados de X son proximinales.
4. Todos los elementos $x^* \in X^*$ alcanzan la norma en B_X.
5. X es reflexivo.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Sean X un espacio de Banach, y B un subconjunto de B_{X^*}.

Conjunto normante B es un subconjunto *1-normante* (brevemente, *normante*) de B_{X^*} si, para cada $x \in X$, se tiene que

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| : x^* \in B\}.$$

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Sean X un espacio de Banach, y B un subconjunto de B_{X^*}.

Conjunto normante B es un subconjunto *1-normante* (brevemente, *normante*) de B_{X^*} si, para cada $x \in X$, se tiene que

$$\|x\| = \sup\left\{|x^*(x)| : x^* \in B\right\}.$$

Frontera de James B es una *frontera de James* para B_{X^*} si, para cada $x \in X$, se tiene que

$$\|x\| = \max\left\{|x^*(x)| : x^* \in B\right\},$$

i.e., si para cada $x \in X$, existe un elemento $b^* \in B$ tal que $|b^*(x)| = \|x\|$.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

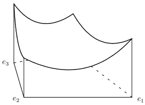
Ejemplos

- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\right)^*}$

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Ejemplos

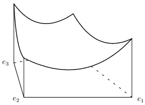
- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\right)^*}$
- Frontera de James: Ext B_{X^*}

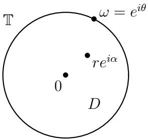


Pre-requisitos de Análisis Funcional

Ejemplos

- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\right)^*}$
- Frontera de James: Ext B_{X^*}

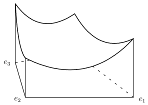


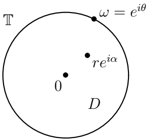


Pre-requisitos de Análisis Funcional

Ejemplos

- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\| \ \|_p\right)^*}$
- Frontera de James: Ext B_{X^*}



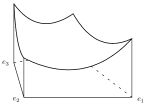


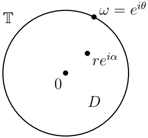
Hay fronteras disjuntas del conjunto de puntos extremales.

Pre-requisitos de Análisis Funcional

Ejemplos

- Conjunto normante: $B_{L^q(\mu,X^*)} \subset B_{\left(L^p(\mu,X),\|\ \|_p\right)^*}$
- Frontera de James: Ext B_{X^*}





Hay fronteras disjuntas del conjunto de puntos extremales.

Simons, [CT04, Teorema 3.5.4]

Sean H un subconjunto convexo de un espacio de Banach X y B una frontera de B_{X^*}. Entonces, H es $\sigma(X,B)$-compacto si, y sólo si, H es débilmente compacto.

La integral de Pettis

Teorema de Dunford, 1937

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función débilmente medible, con $x^* f \in L^1(\mu)$ para cada $x^* \in X^*$. Entonces, la aplicación

$$X^* \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x^* \to \int_E x^* f \, d\mu$$

es un elemento del bidual X^{**}, para cada $E \in \Sigma$.

La integral de Pettis

Integral de Dunford $f : \Omega \longrightarrow X$ es *integrable Dunford*, si es débilmente medible y, para cada $x^* \in X^*$, se tiene que $x^* f \in L^1(\mu)$. En este caso, para cada $E \in \Sigma$, el elemento de X^{**} definido por

$$x_E^{**} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x^* \to \int_E x^* f \, d\mu$$

se llama *integral de Dunford* de f sobre E, y se escribe

$$x_E^{**} = (D) - \int_E f \, d\mu .$$

La integral de Pettis

Integral de Dunford $f : \Omega \longrightarrow X$ es *integrable Dunford*, si es débilmente medible y, para cada $x^* \in X^*$, se tiene que $x^* f \in L^1(\mu)$. En este caso, para cada $E \in \Sigma$, el elemento de X^{**} definido por

$$x_E^{**} : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$x^* \to \int_E x^* f \, d\mu$$

se llama *integral de Dunford* de f sobre E, y se escribe

$$x_E^{**} = (D) - \int_E f \, d\mu.$$

Integral de Pettis En las condiciones de la definición anterior, si $(D) - \int_E f \, d\mu \in X$, para cada $E \in \Sigma$, se dice que la función anterior es *integrable Pettis*, y el valor de la integral de Dunford sobre cada subconjunto $E \in \Sigma$ se denomina, en este caso, *integral de Pettis*.

La integral de Pettis

Observación

- Si $f:\Omega\longrightarrow X$ es una función integrable Bochner, *la fórmula baricéntrica* nos dice que f es integrable Pettis, y para cada conjunto $E\in\Sigma$, la integral de Bochner sobre E de f es su integral de Pettis.

La integral de Pettis

Observación

- Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es una función integrable Bochner, *la fórmula baricéntrica* nos dice que f es integrable Pettis, y para cada conjunto $E \in \Sigma$, la integral de Bochner sobre E de f es su integral de Pettis.
- Integrable Bochner $\Rightarrow$ Integrable Pettis $\Rightarrow$ Integrable Dunford, y ninguna de estas implicaciones se puede volver hacia atrás.

La integral de Pettis

Observación

- Si $f : \Omega \longrightarrow X$ es una función integrable Bochner, *la fórmula baricéntrica* nos dice que f es integrable Pettis, y para cada conjunto $E \in \Sigma$, la integral de Bochner sobre E de f es su integral de Pettis.
- Integrable Bochner $\Rightarrow$ Integrable Pettis $\Rightarrow$ Integrable Dunford,

  y ninguna de estas implicaciones se puede volver hacia atrás.

Una función integrable Dunford que no es integrable Pettis

Consideremos la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$, y sea $f : [0,1] \longrightarrow c_0$ dada por $f(t) = (\chi_{(0,1]}(t), 2\chi_{(0,1/2]}(t), \ldots, n\chi_{(0,1/n]}(t), \ldots)$. Entonces, f es integrable Dunford y no es integrable Pettis.

La integral de Pettis

Observación

- Si $f:\Omega \longrightarrow X$ es una función integrable Bochner, *la fórmula baricéntrica* nos dice que f es integrable Pettis, y para cada conjunto $E \in \Sigma$, la integral de Bochner sobre E de f es su integral de Pettis.
- Integrable Bochner $\Rightarrow$ Integrable Pettis $\Rightarrow$ Integrable Dunford, y ninguna de estas implicaciones se puede volver hacia atrás.

Una función integrable Dunford que no es integrable Pettis

Consideremos la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$, y sea $f:[0,1] \longrightarrow c_0$ dada por $f(t) = (\chi_{(0,1]}(t), 2\chi_{(0,1/2]}(t), \ldots, n\chi_{(0,1/n]}(t), \ldots)$. Entonces, f es integrable Dunford y no es integrable Pettis.

Una función integrable Pettis que no es integrable Bochner

Para la medida de Lebesgue λ en $[0,1]$ la función

$$f:\ [0,1] \longrightarrow \ell^2([0,1]),\ \text{dada por } f(t) = e_t,$$

es integrable Pettis pero no es integrable Bochner.

La integral de Pettis

Una función fuertemente medible integrable Pettis que no es integrable Bochner

- En la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$ sea (A_n) una partición de conjuntos medibles con $\lambda(A_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

La integral de Pettis

Una función fuertemente medible integrable Pettis que no es integrable Bochner

- En la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$ sea (A_n) una partición de conjuntos medibles con $\lambda(A_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- Sea X Banach infinito dimensional y (x_n) en X tal que la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente pero no absolutamente convergente.

La integral de Pettis

Una función fuertemente medible integrable Pettis que no es integrable Bochner

- En la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$ sea (A_n) una partición de conjuntos medibles con $\lambda(A_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- Sea X Banach infinito dimensional y (x_n) en X tal que la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente pero no absolutamente convergente.

La función

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_n)} x_n \chi_{A_n}$$

es integrable Pettis y no es integrable Bochner.

La integral de Pettis

Una función fuertemente medible integrable Pettis que no es integrable Bochner

- En la σ-álgebra de conjuntos medibles Lebesgue en $[0,1]$ sea (A_n) una partición de conjuntos medibles con $\lambda(A_n) > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- Sea X Banach infinito dimensional y (x_n) en X tal que la serie $\sum_n x_n$ es incondicionalmente convergente pero no absolutamente convergente.

La función

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_n)} x_n \chi_{A_n}$$

es integrable Pettis y no es integrable Bochner.

Teorema de Pettis

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Entonces, su integral indefinida $F : \Sigma \longrightarrow X$ dada por

$$F(E) = (P) - \int_E f \, d\mu, \quad E \in \Sigma,$$

es una medida n. a. en Σ que satisface $\lim_{\mu(E)\to 0} F(E) = 0$.

La integral de Pettis

Una función integrable Dunford con int. indefinida no numerablemente aditiva

$f:[0,1]\longrightarrow c_0$ dada por $f(t)=(\chi_{(0,1]}(t),2\chi_{(0,1/2]}(t),\dots,n\chi_{(0,1/n]}(t),\dots)$.

La integral de Pettis

Una función integrable Dunford con int. indefinida no numerablemente aditiva

$f : [0,1] \longrightarrow c_0$ dada por $f(t) = (\chi_{(0,1]}(t), 2\chi_{(0,1/2]}(t), \dots, n\chi_{(0,1/n]}(t), \dots)$.

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función medible e integrable Dunford. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. f es integrable Pettis.
2. La integral indefinida de Dunford, $F(E) = (D) - \int_E f \, d\mu$, $E \in \Sigma$, es una medida numerablemente aditiva.

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Dada una función $f : \Omega \longrightarrow X$, escribimos

$$Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\}$

Dada una función $f : \Omega \longrightarrow X$, escribimos

$$Z_f := \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^{\Omega}.$$

Observar que $Z_f \subset \mathbb{R}^{\Omega}$ es puntualmente τ_p-compacto.

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Dada una función $f : \Omega \longrightarrow X$, escribimos

$$Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\} \subset \mathbb{R}^\Omega.$$

Observar que $Z_f \subset \mathbb{R}^\Omega$ es puntualmente τ_p-compacto.

Teorema, Edgar

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Dunford. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) f es integrable Pettis;

(ii) la aplicación canónica $I : Z_f \longrightarrow L^1(\mu)$ (que envía cada función a su clase de equivalencia en $L^1(\mu)$) es τ_p-débil-continua.

(iii) la aplicación canónica $J : B_{X^*} \longrightarrow L^1(\mu)$ (que envía cada $x^* \in B_{X^*}$ a la clase de equivalencia de $x^* \circ f$ en $L^1(\mu)$) es w^*-débil-continua.

En tal caso, el rango de la integral indefinida $\nu_f(\Sigma)$ es relativamente compacto en norma si y sólo si I (resp. J) es $\mathfrak{T}_p$-$\| \ \|_1$-continua (resp. w^*-$\| \ \|_1$-continua).

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Corolario

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Entonces Z_f es uniformemente integrable.

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Corolario

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Entonces Z_f es uniformemente integrable.

Definición

Se dice que una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, existen $B_1, \ldots, B_n \subset A$, $B_i \in \Sigma$ con $\mu(B_i) > 0$, tales que

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\cdot| - \mathrm{diam}(h(B_i)) \leq \varepsilon \quad \text{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Corolario

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Entonces Z_f es uniformemente integrable.

Definición

Se dice que una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, existen $B_1, \dots, B_n \subset A$, $B_i \in \Sigma$ con $\mu(B_i) > 0$, tales que

$$\min_{1 \le i \le n} |\cdot| - \mathrm{diam}(h(B_i)) \le \varepsilon \quad \text{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

Proposición...otra mirada a medibilidad

Para $f : \Omega \to \mathbb{R}$ son equivalentes:

1. f es medible;
2. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \Sigma$, $B \subset A$ y $\mu(B) > 0$ tal que $|\cdot| - \mathrm{diam}\, f(B) < \varepsilon$.

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\}$

Corolario

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Pettis. Entonces Z_f es uniformemente integrable.

Definición

Se dice que una familia $\mathscr{H} \subset \mathbb{R}^\Omega$ tiene la propiedad de Bourgain si, para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$, existen $B_1, \ldots, B_n \subset A$, $B_i \in \Sigma$ con $\mu(B_i) > 0$, tales que

$$\min_{1 \leq i \leq n} |\cdot| - \operatorname{diam}(h(B_i)) \leq \varepsilon \quad \text{para toda } h \in \mathscr{H}.$$

Proposición...otra mirada a medibilidad

Para $f : \Omega \to \mathbb{R}$ son equivalentes:

1. f es medible;
2. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existe $B \in \Sigma$, $B \subset A$ y $\mu(B) > 0$ tal que $|\cdot| - \operatorname{diam} f(B) < \varepsilon$.
3. Para cada $\varepsilon > 0$ y cada $A \in \Sigma$ con $\mu(A) > 0$ existen existen $B_1, \ldots, B_n \subset A$, $B_i \in \Sigma$ con $\mu(B_i) > 0$, tales que
$$\min_{1 \leq i \leq n} |\cdot| - \operatorname{diam}(f(B_i)) \leq \varepsilon.$$

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \; x^* \in B_{X^*}\}$

Proposición

Sean $\mathscr{H}, \mathscr{G} \subset \mathbb{R}^\Omega$ dos familias de funciones y $\alpha \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain. Entonces:

1. $\overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$ tiene la propiedad de Bourgain;
2. $\mathscr{H}$ está formada por funciones medibles;
3. si $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain, entonces $\mathscr{H} \cup \mathscr{G}$ también tiene la propiedad de Bourgain;
4. si $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$, entonces $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain;
5. Sean $\mathscr{H}$ una familia con la propiedad de Bourgain y $g \in \overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$. Entonces existe una sucesión (h_n) en $\mathscr{H}$ que converge hacia g μ-a.e.

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Proposición

Sean $\mathscr{H}, \mathscr{G} \subset \mathbb{R}^\Omega$ dos familias de funciones y $\alpha \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\mathscr{H}$ tiene la propiedad de Bourgain. Entonces:

1. $\overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$ tiene la propiedad de Bourgain;
2. $\mathscr{H}$ está formada por funciones medibles;
3. si $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain, entonces $\mathscr{H} \cup \mathscr{G}$ también tiene la propiedad de Bourgain;
4. si $\mathscr{G} \subset \mathscr{H}$, entonces $\mathscr{G}$ tiene la propiedad de Bourgain;
5. Sean $\mathscr{H}$ una familia con la propiedad de Bourgain y $g \in \overline{\mathscr{H}}^{\mathfrak{T}_p}$. Entonces existe una sucesión (h_n) en $\mathscr{H}$ que converge hacia g μ-a.e.

Corolario

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función. Si Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain, entonces f es integrable Pettis y el rango de su integral indefinida $\nu_f(\Sigma)$ es relativamente compacto en norma.

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Teorema, Rodriguez-Cascales, [CR05]

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes.

1. f es integrable Birkhoff;
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Teorema, Rodriguez-Cascales, [CR05]

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes.

1. f es integrable Birkhoff;
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Integrabilidad Birkhoff :

1. fue introducida en [Bir35].

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Teorema, Rodriguez-Cascales, [CR05]

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes.

1. f es integrable Birkhoff;
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Integrabilidad Birkhoff :

1. fue introducida en [Bir35].
2. *está estrictamente* entre integrabilidad *Bochner* y *Pettis*, [Pet38, Phi40].

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Teorema, Rodriguez-Cascales, [CR05]

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes.

1. f es integrable Birkhoff;
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Integrabilidad Birkhoff :

1. fue introducida en [Bir35].
2. *está estrictamente* entre integrabilidad *Bochner* y *Pettis*, [Pet38, Phi40].
3. no involucra una definición baricéntrica;

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Teorema, Rodriguez-Cascales, [CR05]

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes.

1. f es integrable Birkhoff;
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Integrabilidad Birkhoff :

1. fue introducida en [Bir35].
2. *está estrictamente* entre integrabilidad *Bochner* y *Pettis*, [Pet38, Phi40].
3. no involucra una definición baricéntrica;
4. si X es separable Birkhoff=Pettis;

Integrabilidad via $Z_f := \{x^* \circ f : \ x^* \in B_{X^*}\}$

Teorema, Rodriguez-Cascales, [CR05]

Para una función $f : \Omega \longrightarrow X$ son equivalentes.

1. f es integrable Birkhoff;
2. Z_f es uniformemente integrable y tiene la propiedad de Bourgain.

Integrabilidad Birkhoff :

1. fue introducida en [Bir35].
2. *está estrictamente* entre integrabilidad *Bochner* y *Pettis*, [Pet38, Phi40].
3. no involucra una definición baricéntrica;
4. si X es separable Birkhoff=Pettis;
5. Birkhoff ha sido históricamente ignorada.

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X, B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;
2. 1963, Rainwater: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$, H $\sigma(X,B)$-suc.compact;

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;
2. 1963, Rainwater: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$, H $\sigma(X,B)$-suc.compact;
3. 1972, James: $B_X \subset B_{X^{**}}$ frontera, caracterización de la reflexividad;

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;
2. 1963, Rainwater: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$, H $\sigma(X,B)$-suc.compact;
3. 1972, James: $B_X \subset B_{X^{**}}$ frontera, caracterización de la reflexividad;
4. 1972, Simons: H $\sigma(X,B)$-suc.compact y B cualquier frontera;

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;
2. 1963, Rainwater: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$, H $\sigma(X,B)$-suc.compact;
3. 1972, James: $B_X \subset B_{X^{**}}$ frontera, caracterización de la reflexividad;
4. 1972, Simons: H $\sigma(X,B)$-suc.compact y B cualquier frontera;
5. 1974, de Wilde: H convexo y B cualquier frontera;

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;
2. 1963, Rainwater: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$, H $\sigma(X,B)$-suc.compact;
3. 1972, James: $B_X \subset B_{X^{**}}$ frontera, caracterización de la reflexividad;
4. 1972, Simons: H $\sigma(X,B)$-suc.compact y B cualquier frontera;
5. 1974, de Wilde: H convexo y B cualquier frontera;
6. 1982, Bourgain-Talagrand: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$.

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;
2. 1963, Rainwater: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$, H $\sigma(X,B)$-suc.compact;
3. 1972, James: $B_X \subset B_{X^{**}}$ frontera, caracterización de la reflexividad;
4. 1972, Simons: H $\sigma(X,B)$-suc.compact y B cualquier frontera;
5. 1974, de Wilde: H convexo y B cualquier frontera;
6. 1982, Bourgain-Talagrand: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$.
7. 1997, Manjabacas-Vera-Cascales: si X no contiene una copia isomorfa de $\ell^1(\Gamma)$, con $|\Gamma| = \mathfrak{c}$, [CMV97, CS03].

Aplicaciones: El problema de la frontera

The boundary problem (Godefroy)...extremal test for compactness

Sean X un espacio de Banach, B una frontera de B_{X^*} y H un subconjunto acotado de X y $\sigma(X,B)$-compacto.

es H es débilmente compacto?

Pioneer positive known results:

1. 1952, Grothendieck: $X = C(K)$ y $B = \mathrm{Ext}(B_{C(K)^*})$;
2. 1963, Rainwater: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$, H $\sigma(X,B)$-suc.compact;
3. 1972, James: $B_X \subset B_{X^{**}}$ frontera, caracterización de la reflexividad;
4. 1972, Simons: H $\sigma(X,B)$-suc.compact y B cualquier frontera;
5. 1974, de Wilde: H convexo y B cualquier frontera;
6. 1982, Bourgain-Talagrand: $B = \mathrm{Ext}(B_{X^*})$.
7. 1997, Manjabacas-Vera-Cascales: si X no contiene una copia isomorfa de $\ell^1(\Gamma)$, con $|\Gamma| = \mathfrak{c}$, [CMV97, CS03].
8. 1998, Godefroy-Cascales: cuando $X = C(K)$, dotado con su norma canónica $\| \|_\infty$, donde K es un espacio compacto arbitrario, [CG98].

Aplicaciones: El problema de la frontera

Teorema, Cascales-Vera, [CV94]

Sea X un espacio de Banach con bola dual $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ angélica. Si B es un subconjunto normante de B_{X^*} y $H \subset X$ es acotado en norma y $\sigma(X,B)$-compacto, entonces $\overline{\mathrm{co}(H)}^{\sigma(X,B)}$ es $\sigma(X,B)$-compacto.

Corolario, Cascales-Vera, [CV94]

El problema de la frontera tiene solución positiva para los espacios de Banach con bola dual angélica. Como consecuencia, si X es un espacio de Banach arbitrario y $B \subset B_{X^*}$ una frontera de James, se tiene que:

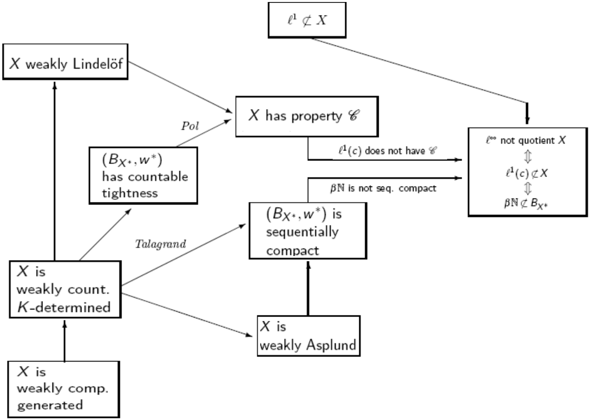
1. Si una sucesión acotada en norma $(x_n)_n$ en X converge hacia x para la topología $\sigma(X,B)$, entonces también converge débilmente.
2. Si $H \subset X$ es un conjunto acotado en norma y $\sigma(X,B)$-sucesionalmente compacto, entonces H es débilmente compacto.

Aplicaciones: El problema de la frontera

Teorema, Cascales-Manjabacas-Vera, [CMV94]

El problema de la frontera tiene solución positiva para los espacios de Banach X que no contienen copias de $\ell^1(\Gamma)$, con $|\Gamma| = \mathfrak{c}$.

Se utilizan las técnicas de integración presentadas antes.



otra aplicación...

Teorema, Pallarés-Cascales, [CP94]

Dado un espacio de Banach X, las condiciones siguientes son equivalentes:

1. X^* tiene la RNP;
2. El conjunto de los puntos extremales $Ext(B_{L^1(\mu,X)^*})$ de la bola unidad dual $B_{L^1(\mu,X)^*}$ es un subconjunto de $L^\infty(\mu,X^*)$, para cada probabilidad μ;
3. Para cada espacio de probabilidad (Ω,Σ,μ) y para cada $f:\Omega\to X$ μ-medible Bochner existe $g\in B_{L^\infty(\mu,X^*)}$ tal que $\| f(\omega)\| = \langle g(\omega), f(\omega)\rangle$ cualquiera que sea $\omega\in\Omega$;
4. Para cada probabilidad μ, la bola unidad $B_{L^\infty(\mu,X^*)}$ es una *"boundary"* para $B_{L^1(\mu,X)^*}$, esto es, para cada $f\in L^1(\mu,X)$ existe $g\in B_{L^\infty(\mu,X^*)}$ tal que $\| f\|_1 = \langle g, f\rangle$;
5. Los subconjuntos $\sigma(L^1(\mu,X),L^\infty(\mu,X^*))$-compactos de $L^1(\mu,X)$ son débilmente compactos, para cada probabilidad μ;
6. Las sucesiones $\sigma(L^1(\mu,X),L^\infty(\mu,X^*))$-convergentes en el espacio $L^1(\mu,X)$ son w-convergentes, para cada probabilidad;
7. X no contiene copias de ℓ^1, y la topología débil de $L^1(\mu,X)$ tiene una base de entornos del origen formada por subconjuntos $\sigma(L^1(\mu,X),L^\infty(\mu,X^*))$-cerrados, para cada probabilidad μ.

La propiedad débil de Radon-Nikodym

Teorema

Para un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X^* tiene la PDRN.
2. $\ell^1 \not\subset X$.
3. La inyección canónica $\mathrm{i} : B_{X^*} \longrightarrow X^*$ es integrable Pettis para cada medida de Radon en $\big(B_{X^*}, \sigma(X^*, X)\big)$.
4. Para cada conjunto $\sigma(X^*, X)$-compacto $K \subset X^*$, se tiene que $\overline{\mathrm{co}(K)}^{\sigma(X^*,X)} = \overline{\mathrm{co}(K)}^{\|\ \|}$.
5. Para cada conjunto $\sigma(X^*, X)$-compacto y convexo $K \subset X^*$, se tiene que $K = \overline{\mathrm{co}(\mathrm{Ext}(K))}^{\|\ \|}$.

Rodríguez-Cascales, [CR05]

En la caracterización anterior pueden sustituirse las derivadas de Radon-Nikodym integrables Pettis por derivadas de Radon-Nikodym integrables Birkhoff.

Recordatorio sesión anterior

Primer teorema de separación, [CT04, 1.3.24]

Sean $E[\mathfrak{T}]$ un *e.v.t.* y A, B subconjuntos convexos no vacíos de E, con $A \cap B = \emptyset$. Si A es abierto, existen $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y $\mathfrak{T}$-continua, y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$f(a) < \alpha \leq f(b), \qquad \text{para cada } \ a \in A, \ b \in B.$$

Si ambos, A y B, son abiertos, f puede tomarse satisfaciendo

$$f(a) < \alpha < f(b), \qquad \text{para cada } \ a \in A, \ b \in B.$$

Recordatorio sesión anterior

Primer teorema de separación, [CT04, 1.3.24]

Sean $E[\mathfrak{T}]$ un *e.v.t.* y A, B subconjuntos convexos no vacíos de E, con $A \cap B = \emptyset$. Si A es abierto, existen $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y $\mathfrak{T}$-continua, y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$f(a) < \alpha \leq f(b), \quad \text{para cada } \ a \in A,\ b \in B.$$

Si ambos, A y B, son abiertos, f puede tomarse satisfaciendo

$$f(a) < \alpha < f(b), \quad \text{para cada } \ a \in A,\ b \in B.$$

Lema,[CT04, 1.3.25]

Sean $E[\mathfrak{T}]$ un *e.v.t.*, $K \subset E$ un conjunto compacto y $F \subset E$ un conjunto cerrado con $K \cap F = \emptyset$. Entonces, existe un entorno abierto del origen W tal que

$$(K + W) \cap (F + W) = \emptyset.$$

Recordatorio sesión anterior

Primer teorema de separación, [CT04, 1.3.24]

Sean $E[\mathfrak{T}]$ un *e.v.t.* y A, B subconjuntos convexos no vacíos de E, con $A \cap B = \emptyset$. Si A es abierto, existen $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y $\mathfrak{T}$-continua, y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$f(a) < \alpha \leq f(b), \quad \text{para cada } a \in A,\ b \in B.$$

Si ambos, A y B, son abiertos, f puede tomarse satisfaciendo

$$f(a) < \alpha < f(b), \quad \text{para cada } a \in A,\ b \in B.$$

Lema,[CT04, 1.3.25]

Sean $E[\mathfrak{T}]$ un *e.v.t.*, $K \subset E$ un conjunto compacto y $F \subset E$ un conjunto cerrado con $K \cap F = \emptyset$. Entonces, existe un entorno abierto del origen W tal que

$$(K + W) \cap (F + W) = \emptyset.$$

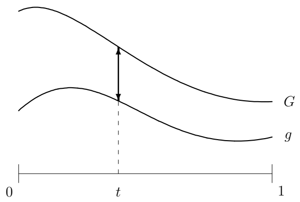
Segundo teorema de separación, [CT04, 1.3.26]

Sean $E[\mathfrak{T}]$ un *e.l.c.* y K, F subconjuntos convexos disjuntos de E, con K compacto y F cerrado. Existen $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal y continua, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, tales que, para todo $y \in K$ y todo $z \in F$,

$$f(y) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha < f(z).$$

La integral para una multifunción

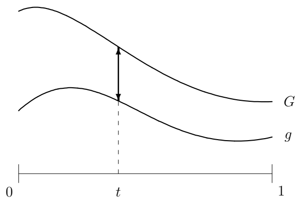
$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos

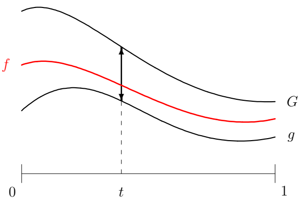


Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y (= \ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



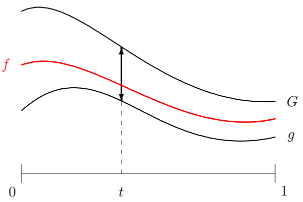
Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F\, d\mu = \left\{ \int f\, d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

La integral para una multifunción

$F:\Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

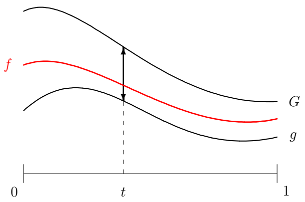
1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j\circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F\,d\mu = \left\{\int f\,d\mu : f \text{ integra. sel.} F\right\}.$$

1. Debreu, [Deb67], usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

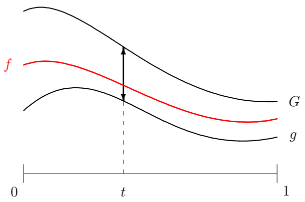
1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y (= \ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F\, d\mu = \left\{ \int f\, d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

1. Debreu, [Deb67], usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;
2. Aumann, [Aum65], uso la técnica de los selectores;

La integral para una multifunción

$F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ –convexos w-compactos



Hay varios caminos para estudiar la integral de una multifunción F:

1. tomar una inmersión razonable j de $cwk(X)$ en un espacio de Banach $Y(=\ell_\infty(B_{X^*}))$ y estudiar la integrabilidad de $j \circ F$;
2. tomar todos los posibles selectores *integrables* f de F y considerar

$$\int F\,d\mu = \left\{ \int f\,d\mu : f \text{ integra. sel.} F \right\}.$$

1. Debreu, [Deb67], usó la técnica de la inmersión con la integral de Bochner en $cK(X)$ –convexos compactos de X;
2. Aumann, [Aum65], uso la técnica de los selectores;
3. Ambos utilizaron las definiciones en modelos de economía: ambos son premios Nobel de economía.

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$
- Existen $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu\right) \le \alpha - \varepsilon < \alpha \le x^* f(w), \quad \text{para todo } \ w \in E. \qquad (2)$$

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$
- Existen $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu\right) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq x^* f(w), \quad \text{para todo } \ w \in E. \qquad (2)$$
- La última desigualdad proporciona $\alpha\mu(E) \leq \int_E x^* f(w) \, d\mu$,

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Proposición

Sea $f : \Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$
- Existen $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f \, d\mu\right) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq x^* f(w), \quad \text{para todo} \;\; w \in E. \qquad (2)$$
- La última desigualdad proporciona $\alpha\mu(E) \leq \int_E x^* f(w) \, d\mu$,
- Es decir $\alpha \leq x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(w) \, d\mu\right)$,

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Proposición

Sea $f:\Omega \longrightarrow X$ una función integrable Bochner. Entonces, para cada $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu \in \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$

Prueba.- Por reducción al absurdo:

- Supongamos que existe un $E \in \Sigma$ para el cual $\mu(E) > 0$, y con
$$\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu \notin \overline{\mathrm{co}(f(E))}.$$
- Existen $x^* \in X^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que
$$x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu\right) \leq \alpha - \varepsilon < \alpha \leq x^* f(w), \quad \text{para todo } \ w \in E. \qquad (2)$$
- La última desigualdad proporciona $\alpha\mu(E) \leq \int_E x^* f(w)\,d\mu$,
- Es decir $\alpha \leq x^*\left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f(w)\,d\mu\right)$, lo que contradice la primera desigualdad de (2) y termina la prueba.

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Teorema Mackey, [Köt69]

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y sea τ_M la topologia en X^* de convergencia uniforme sobre los conjuntos w-compactos de X. Entonces τ_M es la topología en X^* localmente convexa más fina que tiene la propiedad $(X^*, \tau_M)' = X$.

Pre-requisitios. . . La integral para una multifunción

Teorema Mackey, [Köt69]

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio de Banach y sea τ_M la topologia en X^* de convergencia uniforme sobre los conjuntos w-compactos de X. Entonces τ_M es la topología en X^* localmente convexa más fina que tiene la propiedad $(X^*, \tau_M)' = X$.

Corolario

Si X es un espacio de Banach y $A \subset X^*$ es convexo entonces:

$$\overline{A}^{\tau_M} = \overline{A}^{w^*}$$

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_X, \; D \subset C + \eta B_X\}.$$

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_X, \; D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C, D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_X, \ D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_X, \ D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.
3. $ck(X) = \{C \subset X : \ C$ es convexo y $\| \ \| -$compacto en norma$\}$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \ C \subset D + \eta B_X, \ D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.
3. $ck(X) = \{C \subset X : \ C$ es convexo y $\| \ \| -$compacto en norma$\}$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
4. $cwk(X) = \{C \subset \mathscr{C} : \ C$ es convexo y $w - compacto\}$, entonces $ck(X)$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_X, \; D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.
3. $ck(X) = \{C \subset X : \; C$ es convexo y $\| \; \| -$compacto en norma$\}$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
4. $cwk(X) = \{C \subset \mathscr{C} : \; C$ es convexo y $w - compacto\}$, entonces $ck(X)$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
5. X es separable si, y sólo si, $(ck(X), h)$ es separable.

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Sean $C, D \subset X$ dos conjuntos acotados. La distancia de Hausdorff entre C y D se define como

$$h(C,D) = \inf\{\eta > 0 : \; C \subset D + \eta B_X, \; D \subset C + \eta B_X\}.$$

Propiedades:

1. h es una métrica en la familia $\mathscr{C}$ de todos los subconjuntos (no vacíos) cerrados y acotados de X.
2. $(\mathscr{C}, h)$ es completo, gracias a que X es completo.
3. $ck(X) = \{C \subset X : \; C$ es convexo y $\| \; \| -$compacto en norma$\}$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
4. $cwk(X) = \{C \subset \mathscr{C} : \; C$ es convexo y $w - compacto\}$, entonces $ck(X)$ es cerrado en $(\mathscr{C}, h)$ (por tanto completo).
5. X es separable si, y sólo si, $(ck(X), h)$ es separable.
6. Si $C_n \xrightarrow{h} C$ en $\mathscr{C}$ entonces

$$C := \{x \in X : \text{existe } x_n \in C_n \text{ con } x = \lim_n x_n\}$$

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Dados un conjunto acotado $C \subset X$ y $x^* \in X^*$, escribimos

$$\delta^*(x^*, C) := \sup\{x^*(x) : \; x \in C\}.$$

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Dados un conjunto acotado $C \subset X$ y $x^* \in X^*$, escribimos

$$\delta^*(x^*, C) := \sup\{x^*(x) : \ x \in C\}.$$

Teorema Rådström [Råd52]

La aplicación $j : cwk(X) \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ definida por $j(C)(x^*) = \delta^*(x^*, C)$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $j(C + D) = j(C) + j(D)$ para cada $C, D \in cwk(X)$;

(ii) $j(\lambda C) = \lambda j(C)$ para cada $\lambda \geq 0$ y cada $C \in cwk(X)$;

(iii) $h(C, D) = \|j(C) - j(D)\|_\infty$ para cada $C, D \in cwk(X)$;

(iv) $j(cwk(X))$ es cerrado en $\ell_\infty(B_{X^*})$.

Pre-requisitios: la distancia de Hausdorff [Bar93, CV77, KT84]

Definición

Dados un conjunto acotado $C \subset X$ y $x^* \in X^*$, escribimos

$$\delta^*(x^*, C) := \sup\{x^*(x) : \ x \in C\}.$$

Teorema Rådström [Råd52]

La aplicación $j : cwk(X) \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ definida por $j(C)(x^*) = \delta^*(x^*, C)$ satisface las siguientes propiedades:

(i) $j(C+D) = j(C) + j(D)$ para cada $C, D \in cwk(X)$;

(ii) $j(\lambda C) = \lambda j(C)$ para cada $\lambda \geq 0$ y cada $C \in cwk(X)$;

(iii) $h(C, D) = \|j(C) - j(D)\|_\infty$ para cada $C, D \in cwk(X)$;

(iv) $j(cwk(X))$ es cerrado en $\ell_\infty(B_{X^*})$.

Observación

$$\|j(C)\|_\infty = h(\{0\}, C) = \sup\{\|x\| : x \in C\} =: \|C\|, \text{ para } C \in cwk(X)$$

Pre-requisitios. . . selectores. . . teorema de Kuratowski y Ryll-Nardzewski

Definición

Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ se dice medible si

$$\{t \in \Omega : \; F(t) \cap F \neq \emptyset\} \in \Sigma \quad \text{para cada cerrado } F \subset X.$$

Pre-requisitios. . . selectores. . . teorema de Kuratowski y Ryll-Nardzewski

Definición

Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ se dice medible si

$$\{t \in \Omega : \; F(t) \cap F \neq \emptyset\} \in \Sigma \quad \text{para cada cerrado } F \subset X.$$

Si X es separable la definición anterior implica que F puede reemplazarse por abierto.

Pre-requisitios... selectores... teorema de Kuratowski y Ryll-Nardzewski

Definición

Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ se dice medible si

$$\{t \in \Omega : \ F(t) \cap F \neq \emptyset\} \in \Sigma \quad \text{para cada cerrado } F \subset X.$$

Si X es separable la definición anterior implica que F puede reemplazarse por abierto.

Definición

Sea $F : \Omega \longrightarrow 2^X$ una multi-función. Un selector para F es una aplicación $f : \Omega \to X$ tal que

$$f(w) \in F(w), \text{ para cada } w \in \Omega.$$

Pre-requisitios... selectores... teorema de Kuratowski y Ryll-Nardzewski

Definición

Una multi-función $F:\Omega \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ se dice medible si

$$\{t\in\Omega:\ F(t)\cap F\neq\emptyset\}\in\Sigma \quad \text{para cada cerrado } F\subset X.$$

Si X es separable la definición anterior implica que F puede reemplazarse por abierto.

Definición

Sea $F:\Omega\longrightarrow 2^X$ una multi-función. Un selector para F es una aplicación $f:\Omega\rightarrow X$ tal que

$$f(w)\in F(w), \text{ para cada } w\in\Omega.$$

Teorema y Ryll-Nardzewski [KRN65]

Si X es un espacio de Banach separable, toda multi-función $F:\Omega\longrightarrow\mathscr{C}(X)$ medible tiene un selector medible.

La integral para una multifunción

Definición

Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ se dice integrable Debreu si la composición $j \circ F : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$ es integrable Bochner.

Observación

En las condiciones de la definición existe un único $C \in ck(X)$ que cumple $j(C) = (\text{Bochner}) \int_\Omega j \circ F \, d\mu$. Por definición:

$$(De) \int_\Omega F \, d\mu := C.$$

Definición

Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función.

- Si $x^* \in X^*$ escribimos $\delta^*(x^*, F)$ para denotar la función real definida en Ω mediante
$$t \mapsto \delta^*(x^*, F(t)).$$
- $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice escalarmente medible si $\delta^*(x^*, F)$ es medible para cada $x^* \in X^*$.

La integral para una multifunción

Definición

Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función.

- Si $x^* \in X^*$ escribimos $\delta^*(x^*, F)$ para denotar la función real definida en Ω mediante $t \mapsto \delta^*(x^*, F(t))$.
- $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice escalarmente medible si $\delta^*(x^*, F)$ es medible para cada $x^* \in X^*$.

La integral para una multifunción

Definición

Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función.

- Si $x^* \in X^*$ escribimos $\delta^*(x^*, F)$ para denotar la función real definida en Ω mediante $t \mapsto \delta^*(x^*, F(t))$.
- $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice escalarmente medible si $\delta^*(x^*, F)$ es medible para cada $x^* \in X^*$.

Observación

Si $e_{x^*} \in (\ell^\infty(B_{X^*}))^*$ es la evaluación en $x^* \in B_{X^*}$ entonces

$$\langle e_{x^*}, j \circ F \rangle = \delta^*(x^*, F).$$

La integral para una multifunción

Definición

Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función.

- Si $x^* \in X^*$ escribimos $\delta^*(x^*, F)$ para denotar la función real definida en Ω mediante $t \mapsto \delta^*(x^*, F(t))$.
- $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice escalarmente medible si $\delta^*(x^*, F)$ es medible para cada $x^* \in X^*$.

Observación

Si $e_{x^*} \in (\ell^\infty(B_{X^*}))^*$ es la evaluación en $x^* \in B_{X^*}$ entonces

$$\langle e_{x^*}, j \circ F \rangle = \delta^*(x^*, F).$$

Proposición

Si $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ es Debreu integrable, entonces F es escalarmente medible.

La integral para una multifunción

Definición

Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función.

- Si $x^* \in X^*$ escribimos $\delta^*(x^*, F)$ para denotar la función real definida en Ω mediante $t \mapsto \delta^*(x^*, F(t))$.
- $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice escalarmente medible si $\delta^*(x^*, F)$ es medible para cada $x^* \in X^*$.

Observación

Si $e_{x^*} \in (\ell^\infty(B_{X^*}))^*$ es la evaluación en $x^* \in B_{X^*}$ entonces

$$\langle e_{x^*}, j \circ F \rangle = \delta^*(x^*, F).$$

Proposición

Si $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ es Debreu integrable, entonces F es escalarmente medible.

Proposición

Sea X es separable y $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Entonces, F es medible si, y sólo si, F es escalarmente medible.

La integral para una multifunción

Definición

Sea $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función.

- Si $x^* \in X^*$ escribimos $\delta^*(x^*, F)$ para denotar la función real definida en Ω mediante $t \mapsto \delta^*(x^*, F(t))$.
- $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice escalarmente medible si $\delta^*(x^*, F)$ es medible para cada $x^* \in X^*$.

Observación

Si $e_{x^*} \in (\ell^\infty(B_{X^*}))^*$ es la evaluación en $x^* \in B_{X^*}$ entonces

$$\langle e_{x^*}, j \circ F \rangle = \delta^*(x^*, F).$$

Proposición

Si $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ es Debreu integrable, entonces F es escalarmente medible.

Proposición

Sea X es separable y $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ una multi-función. Entonces, F es medible si, y sólo si, F es escalarmente medible.

Corolario

Si $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ es Debreu integrable, entonces F tiene selectores integrables Bochner.

Debreu=Auman

Teorema, Diestel-Ruess-Schachermayer

Supongamos que A es un conjunto acotado y uniformemente integrable de $L^1(\mu, X)$ tal que para cada $f \in A$ se tiene $f(w) \in B_w$, $w \in \Omega$, donde $B_w \subset X$ es débil relativamente compacto. Entonces A es débilmente relativamente compacto en $L^1(\mu, X)$.

Debreu=Auman

Teorema, Diestel-Ruess-Schachermayer

Supongamos que A es un conjunto acotado y uniformemente integrable de $L^1(\mu, X)$ tal que para cada $f \in A$ se tiene $f(w) \in B_w$, $w \in \Omega$, donde $B_w \subset X$ es débil relativamente compacto. Entonces A es débilmente relativamente compacto en $L^1(\mu, X)$.

Teorema

Si $F : \Omega \longrightarrow ck(X)$ es Debreu integrable entonces

$$(D) \int_\Omega F d\mu = \{ \int_\Omega f d\mu : f \text{ selector medible de } F \}.$$

Integral de Pettis

Definición

Sea X un espacio de Banach separable. Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice integrable Pettis si

(i) $\delta^*(x^*, F) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ para todo $x^* \in X^*$;

(ii) para cada $A \in \Sigma$, existe un $(P)\int_A F\, d\mu \in cwk(X)$ tal que

$$\delta^*\left(x^*, (P)\int_A F\, d\mu\right) = \int_A \delta^*(x^*, F)\, d\mu \quad \text{para todo } x^* \in X^*.$$

Integral de Pettis

Definición

Sea X un espacio de Banach separable. Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ se dice integrable Pettis si

(i) $\delta^*(x^*, F) \in \mathscr{L}^1(\mu)$ para todo $x^* \in X^*$;

(ii) para cada $A \in \Sigma$, existe un $(P)\int_A F\, d\mu \in cwk(X)$ tal que

$$\delta^*\left(x^*, (P)\int_A F\, d\mu\right) = \int_A \delta^*(x^*, F)\, d\mu \quad \text{para todo } x^* \in X^*.$$

Proposición – $j \circ F : \Omega \longrightarrow \ell_\infty(B_{X^*})$

Una multi-función $F : \Omega \longrightarrow cwk(X)$ es integrable Pettis si y sólo si

(i) $\langle e_{x^*}, j \circ F\rangle \in \mathscr{L}^1(\mu)$ para todo $x^* \in X^*$;

(ii) para cada $A \in \Sigma$, existe un $(P)\int_A F\, d\mu \in cwk(X)$ tal que

$$\langle e_{x^*}, j\left((P)\int_A F\, d\mu\right)\rangle = \int_A \langle e_{x^*}, j \circ F\rangle\, d\mu \quad \text{para todo } x^* \in X^*.$$

Conexión con líneas de investigación

- ✓ Para X separable hay una teoría razonable de integración de Pettis para $F : \Omega \to cwk(X)$;

Conexión con líneas de investigación

- ✓ Para X separable hay una teoría razonable de integración de Pettis para $F : \Omega \to cwk(X)$;
- ✓ Un problema que no se había estudiado es cuando F integrable Pettis equivale a $j \circ F$ $j \circ F$ integrable Pettis.

Conexión con líneas de investigación

- ✓ Para X separable hay una teoría razonable de integración de Pettis para $F : \Omega \to cwk(X)$;
- ✓ Un problema que no se había estudiado es cuando F integrable Pettis equivale a $j \circ F$ $j \circ F$ integrable Pettis.

Teorema, Kadets-Rodriguez-Cascales, [CKR07]

For a separable Banach space X the following statements are equivalent:

(i) X has the Schur property.

(ii) $(cwk(X), h)$ is separable.

(iii) For any complete probability space (Ω, Σ, μ) and any Pettis integrable multi-function $F : \Omega \to cwk(X)$ the composition $j \circ F$ is Pettis integrable.

(iv) For any Pettis integrable multi-function $F : [0, 1] \to cwk(X)$ the composition $j \circ F$ is Pettis integrable .

(v) For any h-bounded Pettis integrable multi-function $F : [0, 1] \to cwk(X)$ the composition $j \circ F$ is Pettis integrable.

Conexión con líneas de investigación

No se tiene una teoría razonable de integración de Pettis de multifunciones fuera del caso X separable.

Conexión con líneas de investigación

No se tiene una teoría razonable de integración de Pettis de multifunciones fuera del caso X separable.

Algunas aportaciones a la cuestión anterior para X no separable de Kadets-Rodriguez-Cascales aparecerán pronto en
http://misuma.um.es/beca
. . . y después publicados?

References

R. J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, J. Math. Anal. Appl. **12** (1965), 1–12. MR 0185073 (32 #2543)

Michael F. Barnsley, *Fractals everywhere*, second ed., Academic Press Professional, Boston, MA, 1993, Revised with the assistance of and with a foreword by Hawley Rising, III. MR MR1231795 (94h:58101)

G. Birkhoff, *Integration of functions with values in a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), no. 2, 357–378. MR 1 501 815

B. Cascales and G. Godefroy, *Angelicity and the boundary problem*, Mathematatika **45** (1998), no. 1, 105–112. MR 99f:46019

B. Cascales, V. Kadets, and J. Rodríguez, *The pettis integral for multi-valued functions via single-valued ones*, J. Math. Anal. Appl. (2007), no. To appear.

B. Cascales, W. Marciszesky, and M. Raja, *Distance to spaces of continuous functions*, Topology Appl. **153** (2006), no. 13, 2303–2319. MR MR2238732

B. Cascales, G. Manjabacas, and G. Vera, *A Krein-Smulian type result in Banach spaces*, Publicaciones del Departamento de Matematicas. Universidad de Murcia **11** (1994), 1–13.

______, *A Krein-Šmulian type result in Banach spaces*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), no. 190, 161–167. MR 99c:46009

B. Cascales and A. J. Pallarés, *La propiedad de Radon-Nikodym en espacios de Banach duales*, Collect. Math. **45** (1994), no. 3, 263–270. MR 96i:46019

B. Cascales and J. Rodríguez, *The Birkhoff integral and the property of Bourgain*, Math. Ann. **331** (2005), no. 2, 259–279. MR 2115456

References

- B. Cascales and R. Shvydkoy, *On the Krein-Šmulian theorem for weaker topologies*, Illinois J. Math. **47** (2003), no. 4, 957–976. MR MR2036985 (2004m:46044)
- B. Cascales and S. Troyanski, *Fundamentos de análisis matemático*, Curso de doctorado Universidad de Murcia, 2004.
- B. Cascales and G. Vera, *Topologies weaker than the weak topology of a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **182** (1994), no. 1, 41–68. MR 95c:46017
- C. Castaing and M. Valadier, *Convex analysis and measurable multifunctions*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 580. MR 0467310 (57 #7169)
- G. Debreu, *Integration of correspondences*, Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol. II: Contributions to Probability Theory, Part 1, Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967, pp. 351–372. MR 0228252 (37 #3835)
- J. Diestel and J. J. Uhl Jr, *Vector measures*, Mathematical Surveys, vol. 15, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977, With a foreword by B. J. Pettis. MR 56 #12216
- K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 801, Springer, Berlin, 1980, Lectures held at S.U.N.Y., Buffalo, in Spring 1978. MR 82b:46001
- G. Köthe, *Topological vector spaces. I*, Translated from the German by D. J. H. Garling. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 159, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR 40 #1750
- K. Kuratowski and C. Ryll-Nardzewski, *A general theorem on selectors*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **13** (1965), 397–403. MR 0188994 (32 #6421)

References

E. Klein and A. C. Thompson, *Theory of correspondences*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons Inc., New York, 1984, Including applications to mathematical economics, A Wiley-Interscience Publication. MR 752692 (86a:90012)

B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **44** (1938), no. 2, 277–304. MR 1 501 970

R. S. Phillips, *Integration in a convex linear topological space*, Trans. Amer. Math. Soc. **47** (1940), 114–145. MR 2,103c

H. Rådström, *An embedding theorem for spaces of convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 165–169. MR 0045938 (13,659c)